

ПРЕЦИЗИОННАЯ ТОМОГРАФИЯ КУДИТОВ

© 2023 г. Ю. И. Богданов¹, *, Н. А. Богданова¹, Ю. А. Кузнецов¹,
К. Б. Кокшаров¹, В. Ф. Лукичёв¹

¹ФТИАН им. К.А. Валиева РАН, Москва, Россия

*E-mail: bogdanov_yurii@inbox.ru

Поступила в редакцию 09.12.2022 г.

После доработки 20.12.2022 г.

Принята к публикации 22.12.2022 г.

Многоуровневые квантовые состояния (кудиты) представляют собой перспективную платформу для масштабируемых квантовых вычислений. В настоящей работе представлен метод высокоточного контроля таких систем с помощью нечетких квантовых измерений. Разработанный метод применяется для прецизионной реконструкции квантовых состояний в условиях существенного влияния декогерентизации и квантовых шумов. Рассмотрены протоколы квантовых измерений на основе взаимно- несмещенных базисов различных размерностей. Исследованы характеристики точности наборов случайных состояний, равномерно распределенных по мере Хаара.

Ключевые слова: кубиты, кудиты, нечеткие квантовые измерения, квантовая томография, декогерентизация

DOI: 10.31857/S0544126923700308, **EDN:** UDMMYA

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что перспективность квантовых компьютеров обусловлена тем, что некоторые вычислительные задачи могут выполняться экспоненциально быстрее на квантовом процессоре по сравнению с любым современным или перспективным классическим суперкомпьютером [1, 2]. Фундаментальная проблема заключается в создании высокопроизводительного процессора, способного выполнять квантовые алгоритмы в экспоненциально большом вычислительном пространстве. В настоящее время предложены многие десятки различных физических платформ, на которых могут быть реализованы квантовые вычисления. Среди наиболее перспективных платформ можно выделить некоторые, в том числе системы на основе ионов в ловушках, системы на основе атомов в ловушках, сверхпроводниковые процессоры и фотонные чипы.

Несмотря на интенсивное развитие квантового компьютеринга в течение более, чем четверть века, создание полномасштабного квантового компьютера все еще остается недостижимой мечтой для современных технологий. Вместе с тем, исследования, выполненные в последние годы, показали, что квантовое ускорение достижимо в реальной системе и не запрещено никакими скрытыми физическими законами. Можно констатировать, что существенный прогресс в области экспериментальных и технологических исследований вселяет реальную

надежду на создание в среднесрочной перспективе квантовых вычислительных устройств, способных решать практически важные задачи.

Достигнутый уровень квантовых информационных разработок провозглашает новую эру NISQ (Noisy Intermediate Scale Quantum) — технологий. Такие технологии, сами по себе, еще до создания полномасштабных квантовых компьютеров, открывают новые довольно широкие вычислительные возможности, которые включают в себя методы оптимизации, машинное обучение, материаловедение, химию, а также ряд других научных и практических областей.

Необходимо обеспечить непрерывное совершенствование NISQ-технологий с тем, чтобы с течением времени открывались бы возможности для решения все более сложных задач. Для решения поставленных задач критически важно разработать систему непрерывного мониторинга и прогнозирования характеристик точности и эффективности квантовых информационных устройств в зависимости от степени их интеграции для вычислительных задач различной сложности и для различных уровней декогерентизации и квантовых шумов [3–6].

Наряду с математическим моделированием квантовых операций и алгоритмов необходимо осуществлять их контроль в условиях реального эксперимента. Основным инструментом для этих целей служит томография квантовых состояний

и процессов [7–11], которая призвана обеспечить интерфейс между разработкой элементной базы квантовых компьютеров и симуляторов и ее практическим воплощением. Методы численного анализа и статистического моделирования с учетом влияния квантовых шумов, а также результатов технологических и экспериментальных исследований позволяют дать исчерпывающую оценку качеству и эффективности проектируемых квантовых регистров, сформулировать требования к экспериментальному оборудованию и технологии, посредством обратной связи развиваемый подход позволяет наилучшим образом распорядиться имеющимися ресурсами для оптимизации процесса разработки квантовых информационных технологий.

В настоящем исследовании акцент сделан на кудиты, которые представляют собой перспективную платформу для масштабируемых квантовых вычислений [12, 13]. Квантовая томография и прецизионный контроль многоуровневых систем представляют собой актуальную задачу квантовых информационных технологий [14, 15]. С математической точки зрения измерение квантовых состояний кудитов произвольных размерностей связано с измерением квантовых состояний частиц с произвольным спином [16]. Высокая точность измерений состояний кудитов может быть обеспечена посредством реализации высокосимметричных протоколов квантовых измерений [17, 18].

2. ПРОТОКОЛЫ КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ТОЧНОСТЬ

В соответствии с основными принципами квантовой механики, вероятность обнаружить квантовую систему в состоянии $|\phi\rangle$ при условии, что она была приготовлена в состоянии $|\psi\rangle$, может быть записана в следующем виде:

$$P = |\langle\phi|\psi\rangle|^2. \quad (1)$$

Согласно принципу дополнительности Н. Бора, различные проекционные измерения образуют совокупность взаимно-дополнительных измерений. Рассматриваемая совокупность, в свою очередь, образует протокол квантовых измерений. Вся совокупность квантовых измерений протокола может быть компактно представлена в матричном виде [9–11]:

$$M_j = X_{jl}c_l, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Здесь c_l , $l = 1, 2, \dots, s$ — компоненты вектора состояния в гильбертовом пространстве размерности s . По повторяющемуся индексу l в формуле (2) предполагается суммирование. Протокол описывает m проекций квантового состояния (поэтому имеет m строк). M_j есть амплитуда вероятности j -ой кван-

товой проекции. Вероятности λ_j соответствующих измерений задаются квадратами модулей амплитуд:

$$\lambda_j = |M_j|^2. \quad (3)$$

Матрица с компонентами X_{jl} , имеющая m строк и s столбцов задает так называемую аппаратную матрицу протокола квантовых измерений [9–11].

Именно эта матрица описывает формально математически всю совокупность взаимно-дополнительных измерений (j -ая строка матрицы X задает бра-вектор $\langle\phi_j|$ соответствующего проекционного измерения в формуле (2)).

Для смешанного состояния с матрицей плотности ρ соответствующая вероятность регистрации событий, отвечающих j -ой строке протокола, есть:

$$\lambda_j = \text{tr}(\Lambda_j \rho). \quad (4)$$

Здесь $\Lambda_j = X_j^+ X_j$ — оператор измерения, X_j есть j -ая строка аппаратной матрицы X .

Пусть матрица, отвечающая сумме всех операторов измерения Λ_j и равная $X^+ X$, пропорциональна единичной матрице I :

$$\sum_{j=1}^m \Lambda_j = aI, \quad (5)$$

где a — некоторая положительная постоянная.

Протокол, удовлетворяющий условию (5), отвечает так называемому неортогональному разложению единицы. Оказывается, что путем перехода в пространство более высокой размерности такой протокол может быть сведен к традиционным измерениям фон Неймана, основанным на ортогональном разложении единицы [19].

Рассматриваемый переход в пространство более высокой размерности основан на стандартной процедуре ортогонального (унитарного) дополнения. Для этого осуществим перенормировку аппаратной матрицы X согласно следующему

правилу: $X \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} X$. В результате указанного пре-

образования столбцы новой матрицы X будут образовывать совокупность (набор) из s ортонормированных векторов размерности m ($s < m$). Теперь посредством стандартной процедуры ортогонального (унитарного) дополнения, путем добавления еще $m - s$ столбцов справа, мы сможем расширить нашу прямоугольную аппаратную матрицу X размерности $m \times s$ до квадратной унитарной матрицы U размерности $m \times m$. Заметим, что процедура ортогонального дополнения определена с точностью до широкого произвола, но это обстоятельство не имеет существенного значения, по-

скольку все возможные унитарные матрицы, которые можно получить в рамках рассматриваемой процедуры, соответствуют эквивалентным допустимым решениям поставленной задачи.

С физической точки зрения мы можем наглядно представить себе, что имеем дело с m -уровневой квантовой системой (атомной, ионной, молекулярной и пр.), в которой s уровней (например, низших) отвечают кудиту, а остальные $m - s$ уровней являются вспомогательными. Вектор состояния в такой расширенной m -уровневой системе представляет собой столбец из m комплексных амплитуд вероятности $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$. При этом, при приготовлению кудита отвечает такая ситуация, когда первые s амплитуд $c_0, c_1, \dots, c_{s-1}$, вообще говоря, ненулевые, а остальные — строго равны нулю. Реализация протокола квантовых измерений сводится к унитарному преобразованию U , построенному в рамках процедуры ортогонального дополнения, с последующим считыванием населенностей всех m уровней. Важно заметить, что физическая реализация такого рода протоколов квантовых измерений, безусловно, является весьма трудной задачей, особенно когда размерность m велика. Однако, для нас важна скорее принципиальная возможность такого рода квантовых измерений, а не их технологическая реализация. Заметим также, что в реальных экспериментах, вероятности, отвечающие различным строкам протокола, часто измеряются по отдельности, независимо друг от друга (смотри, например, работы [20–22]).

Точность восстановления (Fidelity) для чистых квантовых состояний определяется следующей формулой:

$$F = |\langle c_0 | c \rangle|^2. \quad (6)$$

Здесь $|c\rangle$ является вектором столбцом, состоящим из s комплексных амплитуд вероятностей $c_0, \dots, c_{s-1}$. В общем случае точность вычисляется по следующему выражению

$$F = \left(\text{Tr} \sqrt{\rho_0^{1/2} \rho \rho_0^{1/2}} \right)^2, \quad (7)$$

где ρ_0 теоретическая матрица плотности квантового состояния, а ρ — реконструированная матрица плотности.

Если томография выполняется по методу максимального правдоподобия, то в асимптотическом пределе, при больших объемах выборки, возникает статистическое распределение потерь точности для величины $dF = 1 - F$, которая оказывается распределенной согласно обобщенному χ^2 -распределению [9–11].

Распределение потерь точности можно получить при помощи матрицы полной информации H [9]. Пусть r — ранг квантового состояния (число нену-

левых собственных значений матрицы плотности). При этом оказывается, что наибольшее собственное значение матрицы H отвечает за нормировку квантового состояния. Оказывается также, что в случае томографически полного протокола имеется ровно r^2 несущественных нулевых собственных значений, которые необходимо отбросить. Оставшиеся $v_p = (2s - r)r - 1$ ненулевых собственных значений обозначим как h_j ($j = 1, \dots, v_p$) и введем вектор d согласно формуле:

$$d_j = \frac{1}{2h_j}, \quad j = 1, \dots, v_p. \quad (8)$$

Искомое теоретическое распределение потерь точности будет

$$1 - F = \sum_{j=1}^{v_p} d_j \xi_j^2, \quad (9)$$

где $\xi_j \sim N(0, 1)$ — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией.

Удобно ввести среднюю функцию потерь точности, которая асимптотически не зависит от объема выборки n [9–11, 23].

$$L = n \langle 1 - F \rangle \quad (10)$$

Можно показать [23], что для протоколов POVM, сводящихся к разложению единицы, минимальные возможные потери точности определяются формулой:

$$L_{\min} = \frac{v_p^2}{4(s-1)}. \quad (11)$$

В случае чистых состояний, когда $r = 1$, формула (11) принимает более простой вид:

$$L_{\min} = s - 1. \quad (12)$$

Эффективность квантового протокола есть отношения средних потерь точности к теоретическому минимуму.

$$\eta = \frac{\langle 1 - F \rangle_{\min}}{\langle 1 - F \rangle} = \frac{v_p^2}{4L(s-1)}. \quad (13)$$

В настоящем исследовании рассматривались проекционные измерения во взаимно-несмещенных базисах (MUB — *mutually unbiased bases*) [24–28]. Пусть векторы $|e_i\rangle$ и $|f_j\rangle$ образуют два различных ортонормированных базиса. Данные базисы называют взаимно-несмещенными, если выполняются следующие соотношения:

$$|\langle e_i | f_j \rangle|^2 = \frac{1}{s}, \quad i, j = 0, \dots, s-1. \quad (14)$$

В настоящей работе рассматривались MUB-протоколы в пространствах размерностей $s = 2, 3, 4, 5, 8$.

Таблица 1. Потери точности для протоколов на основе взаимно-несмещенных базисов для различных размерностей. Представлены средние значения для случайных состояний, равномерно распределенных по мере Хаара

s	L	$L_{\min}$
2	1.08333 ± 0.00037	1
3	2.20440 ± 0.00091	2
4	3.27362 ± 0.00082	3
5	4.3245 ± 0.0011	4
8	7.39304 ± 0.00062	7

Число взаимно-несмещенных базисов в этих случаях есть $s + 1$, поэтому общее число строк протокола есть $m = s(s + 1)$. Заметим, что измерения во всех $s + 1$ взаимно-несмещенных базисах обеспечивают информационную полноту, которая дает возможность реконструкции произвольного состояния (чистого или смешанного).

Для рассматриваемых MUB-протоколов в табл. 1 представлена точность реконструкции чистых случайных квантовых состояний, равномерно распределенных по мере Хаара. Результаты получены методом моделирования с использованием матрицы полной информации. Мы видим из таблицы, что MUB-протоколы способны обеспечить точность, которая довольно близка к максимально возможной точности, которая может быть достигнута согласно формуле (12).

$$U = \exp(-iH\theta) = \exp(-i\theta(b + b^\dagger) \otimes a^\dagger a). \quad (17)$$

Здесь θ — параметр преобразования (фиктивное время).

Операторы преобразования Крауса E_k могут быть вычислены как матричные элементы блочной матрицы U

$$E_k = \langle k|U|0\rangle. \quad (18)$$

Здесь m — число операторов Крауса, $|0\rangle, \dots, |m\rangle$ — ортонормированные состояния среды (столбцы длины m). Отметим, что формула (18) записана в блочном представлении матриц. В развернутой записи под $|0\rangle$ нужно понимать $|0\rangle \otimes I_s$, где I_s — единичная матрица размерности $s \times s$. Аналогично, вместо $\langle k|$ нужно брать $\langle k| \otimes I_s$ и т.д.

В случае кубитов операторы Крауса (18) эквивалентны операторам (15) при условии [29]:

$$\gamma = \sin^2 \theta. \quad (19)$$

На основе элементов преобразования Крауса может быть построена хитрая матрица, играющая ключевую роль в томографии квантовых процес-

3. ВЛИЯНИЕ ФАЗОВОЙ РЕЛАКСАЦИИ НА ТОЧНОСТЬ ТОМОГРАФИИ КУДИТОВ

Рассмотрим теперь влияние фазовой релаксации на квантовые состояния кудитов. Предлагаемая модель представляет собой обобщение на случай релаксации кудитов результатов работы [29], нацеленной на исследование релаксации кубитов.

Операторы Крауса для фазовой релаксации отдельного кубита можно представить в виде:

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Параметр $0 \leq \gamma \leq 1$ определяет интенсивность фазовой релаксации.

Для моделирования фазовой релаксации будем рассматривать следующий гамильтониан взаимодействия

$$H = (b + b^\dagger) \otimes a^\dagger a. \quad (16)$$

Здесь операторы уничтожения и рождения b и $b^\dagger$ относятся к кудиту окружения, a и $a^\dagger$ — к физическому кудиту. В качестве таких операторов будем использовать операторы уничтожения и рождения осциллятора, урезанные до размерности кудита s . Унитарное преобразование, задаваемое данным гамильтонианом есть:

сов. Возьмем матрицу E_1 размерности $s \times s$ и вытянем ее в столбец e_1 длины s^2 (при вытягивании второй столбец поместим под первым и т.д.). Полученный столбец e_1 будет первым столбцом некоторой матрицы e . Аналогичным образом матрица E_2 задаст второй столбец матрицы e и т.д.

На основе полученной матрицы e определим теперь матрицу χ размерности $s^2 \times s^2$ по формуле:

$$\chi = ee^\dagger. \quad (20)$$

Важно, что матрицу χ можно интерпретировать как некоторую матрицу плотности в гильбертовом пространстве размерности s^2 . Тем самым, любое квантовое преобразование сводится к некоторому состоянию в гильбертовом пространстве большей размерности — так называемый изоморфизм Чоя—Ямилковского (Choi—Jamolkowski).

Введем оператор эволюции G . Пусть матрицы плотности ρ_{in} и ρ_{out} вытянуты в столбцы длины s^2 .

Тогда, в силу линейности квантовой операции, можно записать:

$$\rho_{out} = G\rho_{in}. \quad (21)$$

Здесь G задает соответствующую матрицу эволюции размерности $s^2 \times s^2$.

Важно отметить, что матрицы G и χ составлены из одних и тех же элементов (однако, порядок следования этих элементов различен).

Можно показать, что соответствие между индексами рассматриваемых матриц задается следующим правилом:

$$G_{m+s(n-1), j+s(k-1)} = \chi_{(j-1)s+m, (k-1)s+n} \quad (22)$$

$$j, k, m, n = 1, 2, \dots, s$$

Важный частный случай представляют собой однородные во времени марковские процессы. Пусть $G_0 = G(\Delta t)$ – матрица эволюции системы за время Δt . Тогда N шагов такой эволюции, т.е. эволюция за время $t = N\Delta t$ будет определяться оператором G , который имеет следующий простой вид:

$$G = (G_0)^N \quad (23)$$

Формулу (9) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$G = \exp(N \ln G_0). \quad (24)$$

Условие марковости квантовой операции означает, что время, в течение которого среда “помнит”

о своих корреляциях с системой, пренебрежимо мало. На языке унитарного представления квантовой операции это можно пояснить следующим образом. Предположим, как обычно, что на входе совместное состояние среды и системы не запутано и дается тензорным произведением $|0\rangle\langle 0| \otimes \rho_{in}$. В результате унитарной эволюции, задаваемой матрицей U , на выходе возникает запутанное совместное состояние $U|0\rangle\langle 0| \otimes \rho_{in}U^\dagger$. Процесс “забывания” корреляций между системой и средой характеризуется тем, что через небольшое время Δt их совместное состояние снова становится несцепленным и определяется тензорным произведением $|0\rangle\langle 0| \otimes \rho_{out}$, т.е.:

$$U|0\rangle\langle 0| \otimes \rho_{in}U^\dagger \xrightarrow{\text{decoherence}} |0\rangle\langle 0| \otimes \rho_{out}. \quad (25)$$

Рассмотрим инфинитезимальное преобразование, отвечающее малому фиктивному времени $\theta_0 \ll 1$. Пусть $\gamma_0 = \sin^2 \theta_0$, тогда $\gamma_0 \ll 1$. Тогда, если число шагов N эволюции не слишком велико, то $\gamma_0 N \ll 1$ и имеет место слабая декогерентизация. Напротив, при достаточно больших N получим $\gamma_0 N \gg 1$ и будем иметь сильную декогерентизацию.

Пусть $0 \leq \gamma \leq 1$ – исходный феноменологический параметр, описывающий фазовую релаксацию. Возьмем инфинитезимальный параметр γ_0 согласно формуле:

$$\gamma_0 = \frac{-\ln(1-\gamma)}{N}. \quad (26)$$

Если параметр $N \gg 1$ взять достаточно большим, то итоговая эволюция не будет зависеть от N .

Из (26) следует, что $\gamma_0 N = -\ln(1-\gamma)$. Тогда, если $\gamma \ll 1$, то $\gamma_0 N = -\ln(1-\gamma) \approx \gamma$ и будем иметь слабую фазовую релаксацию. Напротив, если $\gamma \rightarrow 1$, то $\gamma_0 N = -\ln(1-\gamma) \rightarrow \infty$ и будем иметь сильную фазовую релаксацию. В пределе $\gamma \rightarrow 1$ все

недиагональные элементы матрицы плотности (когерентности) стремятся к нулю и матрица плотности становится диагональной, при этом диагональные элементы (населенности) не изменяются в процессе эволюции.

4. НЕЧЕТКИЕ КВАНТОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Рассмотрим открытую квантовую систему, состояние которой в начальный момент времени задается с помощью матрицы плотности ρ_{in} . Будучи открытой, система находится в процессе неконтролируемого обмена информацией со своим окружением, что приводит к декогерентизации рассматриваемого состояния. Данный процесс может быть описан операторной суммой, когда состояние на выходе канала определяется формулой $\rho_{out} = \sum_k E_k \rho_{in} E_k^\dagger$ [1]. Здесь E_k – элементы преобразования, или операторы Крауса.

Вероятность регистрации события j при томографии состояния ρ_{out} , определяемая по формуле (4), есть

$$\lambda_j = \text{Tr}(\Lambda_j \rho_{out}) = \text{Tr}\left(\Lambda_j \sum_k E_k \rho_{in} E_k^\dagger\right) = \text{Tr}\left(\Lambda_j^{\text{mixed}} \rho_{in}\right). \quad (27)$$

Таблица 2. Сравнение модели нечетких квантовых измерений со стандартной моделью в приложении к сверхпроводниковым кубитам на облачном квантовом процессоре IBM

Состояние	Fidelity (стандартная модель)	Fidelity (модель нечетких измерений)	Превосходство (фактор уменьшения потерь точности)
$c=[1;-1]/\sqrt{2}$	0.96640	0.999765	142.7
$c=[1;1]/\sqrt{2}$	0.99171	0.999275	11.44
$c=[1, 1]/\sqrt{2}$	0.99646	0.999782	16.26
$c=[1;-1]/\sqrt{2}$	0.96463	0.998001	17.69

Здесь введены операторы смешанных (нечетких) измерений:

$$\Lambda_j^{mixed} = \sum_k E_k^+ \Lambda_j E_k. \quad (28)$$

С точки зрения вероятности регистрации событий томография состояния ρ_{out} протоколом с операторами измерения Λ_j эквивалентна томографии состояния ρ_{in} протоколом с операторами измерения Λ_j^{mixed} . Это позволяет нам реконструировать начальное состояние системы таким, какое оно было до того, как начало деградировать из-за взаимодействия со своим окружением. Другими словами, канал с декогерентизацией становится частью обобщенной измерительной установки, которая работает непосредственно с начальным состоянием. В то же время, как будет показано ниже, наличие декогерентизации приводит к определенной деградации точности восстановления. Эта деградация возрастает с увеличением уровня квантовых шумов. Для компенсации рассматриваемого эффекта необходимо увеличивать количество представителей статистического ансамбля. Другим условием применимости разрабатываемого метода является необходимость обладания полной информацией о характеристиках шума в канале (например, нужно знать вид операторов E_k или состояние Чоя–Ямилковского [1]). Для получения этой информации в реальных экспериментах, следует предварительно провести томографию квантового процесса в рассматриваемом канале [30–35].

В табл. 2 ниже представлены результаты квантовой томографии в рамках процедуры нечетких измерений для некоторых состояний на квантовом процессоре IBM.

На первом этапе были оценены вероятности ошибок p_{01} (регистрация “ноля”, когда на самом деле “единица”) и p_{10} (регистрация “единицы”, когда на самом деле “ноль”). Из 1024 состояний “0” 16 были зарегистрированы как “1”, поэтому вероятность ошибочной регистрации 1, когда на самом деле 0 есть: $p_{10} = 16/1024 = 0.0156$. Аналогично, из 1024 состояний “1” 85 были зарегистри-

рованы как “0”, поэтому вероятность ошибочной регистрации 0, когда на самом деле 1 есть: $p_{01} = 85/1024 = 0.0830$.

На втором этапе модель нечетких измерений была применена к оценке 4-х состояний, представлявших собой собственные векторы матриц Паули σ_x и σ_y . Объем выборки составлял $3 \cdot 1024 = 3072$ представителей (здесь множитель 3 отвечает трем взаимно-дополнительным распределениям вероятностей в протоколе квантовых измерений с симметрией куба [23]).

Из представленной таблицы мы видим, что использование модели нечетких измерений позволяет снизить потери точности в десятки, а иногда и в сотни раз.

На рис. 1 представлено исследование точности томографии 8-ми уровневого кудита ($s = 8$) в условиях фазовой релаксации ($\gamma = 0.05$) в рамках модели нечетких измерений в сравнении со стандартной моделью. Рассматривается томография чистых состояний, распределенных по мере Хара. Был применен протокол на основе 9-ти взаимно несмещенных базисов (MUB), объем выборки в каждом эксперименте составил 10^6 , число экспериментов 200, уровень фазовой релаксации $\gamma = 0.05$. При оценке влияния фазовой релаксации на квантовые состояния мы использовали модель, которая детально описана в нашей работе [34]. Полученные данные показывают, что фактор уменьшения потерь точности при использовании модели нечетких измерений по сравнению со стандартной составил 2200, что говорит о радикальном преимуществе модели нечетких измерений.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КВАНТОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С УЧЕТОМ ФАЗОВОЙ РЕЛАКСАЦИИ

В табл. 3 ниже представлены результаты проведенного исследования, направленного на изучение влияния фазовой релаксации на точность томографии кудитов. В качестве протоколов квантовых измерений рассматриваются совокупности взаим-

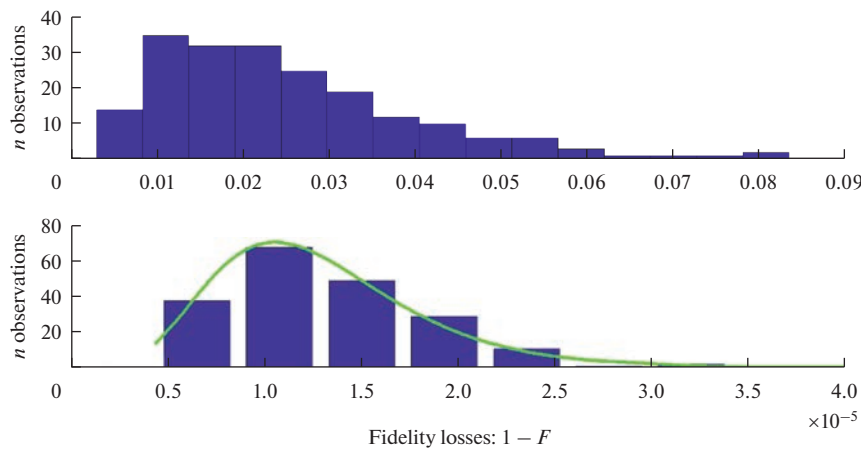


Рис. 1. Исследование точности томографии 8-ми уровневого кудита ($s = 8$) в условиях фазовой релаксации. Представлено сравнение стандартной томографии (вверху) с томографией в рамках модели нечетких измерений (внизу).

но-несмещенных базисов. Выполненное исследование базируется на матрице полной информации и универсальном распределении точности [9–11], а также на концепции нечетких измерений [36, 37].

Представлены результаты численных экспериментов (в каждом эксперименте 10 тысяч случайных состояний, равномерно распределенных по мере Хаара [38, 39]). В качестве меры качества квантовых измерений выбрана функция потерь L , определяемая формулой $L = \langle 1 - F \rangle n$ [9–11]. Здесь $\langle 1 - F \rangle$ – средние потери точности (потери

Fidelity), n – объем выборки (число представителей квантового статистического ансамбля). В первом столбце таблицы представлена размерность гильбертова пространства s , во втором – параметр фазовой релаксации γ , в третьем – средние потери точности для модели нечетких измерений, в четвертом – средние потери точности для стандартной модели при объеме выборки $n = 10000$, в пятом – фактор превосходства модели нечетких измерений над стандартными измерениями, в шестом – фактор превосходства гипотетических идеальных измерений над нечеткими.

Таблица 3. Влияние фазовой релаксации на точность томографии кудитов

s	γ	L_{fuzzy}	L	Фактор превосходства (fuzzy)	Фактор превосходства (ideal)
2	0	1.0833	1.0833	1	1
2	0.001	1.0850	1.6685	1.5378	1.0018
2	0.01	1.1014	16.849	15.298	1.016
2	0.1	1.2214	171.22	140.18	1.1266
3	0	2.205	2.205	1	1
3	0.001	2.211	4.956	2.2414	1.0041
3	0.01	2.277	50.112	22.011	1.0327
3	0.1	2.779	488.03	175.59	1.261
4	0	3.274	3.2743	1	1
4	0.001	3.301	9.9693	3.0201	1.0079
4	0.01	3.462	98.481	28.45	1.0568
4	0.1	4.740	913.86	192.8	1.4473
8	0	7.393	7.393	1	1
8	0.001	7.597	46.375	6.1039	1.0277
8	0.01	8.788	441.07	50.191	1.1886
8	0.1	18.527	2902.6	156.67	2.5059

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем исследовании разработан метод высокоточного контроля многоуровневых квантовых состояний (кудитов) с помощью нечетких квантовых измерений. Разработанный метод применяется для прецизионной реконструкции квантовых состояний в условиях существенного влияния декогерентизации и квантовых шумов. Рассмотрены протоколы квантовых измерений на основе взаимно-несмещенных базисов различных размерностей. Были выполнены исследования процессов декогерентизации, обусловленных фазовой релаксацией, для кудитов различных размерностей и для различных уровней квантовых шумов применительно к набору случайных состояний, равномерно распределенных по мере Хаара. Исследования показали радикальное превосходство модели нечетких квантовых измерений по сравнению со стандартной квантовой томографией.

Результаты исследования имеют практическое значение для задач обеспечения качества и эффективности квантовых информационных технологий на основе многоуровневых систем (кудитов).

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 22-12-00263. Раздел 2 “Протоколы квантовых измерений и их точность” выполнен при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (грант № 20-1-1-34-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nielsen Michael A., Chuang Isaac L. (2010). Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. Cambridge: Cambridge University Press.
2. Bogdanov Yu.I., Valiev K.A., Kokin A.A. Quantum computers: Achievements, implementation difficulties, and prospects // Russian Microelectronics, 2011. V. 40. № 4. PP. 225–236.
3. Богданов Ю.И., Фастовец Д.В., Бантыш Б.И., Черняский А.Ю., Семенихин И.А., Богданова Н.А., Катамадзе К.Г., Кузнецов Ю.А., Кокин А.А., Лукичев В.Ф. Методы анализа качества элементной базы квантовых информационных технологий // Квантовая электроника. 48 (11), 1016–1022 (2018).
4. Bogdanov Yu.I., Bantysh B.I., Chernyavskiy A.Yu., Lukichev V.F., and Orlikovsky A.A. Investigating the Effect of Amplitude and Phase Relaxation on the Quality of Quantum Information Technologies // Russian Microelectronics. 2015. V. 44. № 4. P. 225–230.
5. Богданов Ю.И., Богданова Н.А., Фастовец Д.В., Лукичев В.Ф. Решение уравнения Шредингера на квантовом компьютере методом Залки-Визнера с учетом квантовых шумов // Письма в ЖЭТФ. 2021. Т. 114. Выпуск 6. С. 391–399.
6. Bogdanov Yu.I. Quantum measurements and high-precision control of quantum states // Proc. of SPIE. V. 12157. 121571V (2022).
7. Banaszek K., Cramer M., Gross D. (ed.) 2012–2013 Focus on quantum tomography // New J. Phys. (focus issue) <http://iopscience.iop.org/1367-2630/page/Focus%20on%20Quantum%20Tomography>
8. D’Ariano G.M., Paris M.G.A., Sacchi M.F. Quantum State Estimation // Lecture Notes in Physics / ed. Paris M., Řeháček J. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. V. 649. 519 p.
9. Bogdanov Yu.I. Unified statistical method for reconstructing quantum states by purification, JETP 135, 6, 1068 (2009).
10. Bogdanov Yu.I., Brida G., Genovese M., Kulik S.P., Moreva E.V., and Shurupov A.P. Statistical Estimation of the Efficiency of Quantum State Tomography Protocols // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. 010404. 4 p.
11. Bogdanov Yu.I., Brida G., Bukeev I.D., Genovese M., Kravtsov K.S., Kulik S.P., Moreva E.V., Soloviev A.A., Shurupov A.P. Statistical Estimation of Quantum Tomography Protocols Quality // Phys. Rev. A. 2011. V. 84. 042108. 19 p.
12. Kiktenko E.O., Fedorov A.K., Strakhov A.A., Man’ko V.I. Single qudit realization of the Deutsch algorithm using superconducting many-level quantum circuits // Phys. Lett. A. 379:22 (2015). 1409–1413
13. Kiktenko E.O., Nikolaeva A.S., Peng Xu, Shlyapnikov G.V., Fedorov A.K. Scalable quantum computing with qudits on a graph // J. Phys. A. 101:2 (2020), 22304. 7 pp. arXiv: 1909.08973.
14. Бантыш Б.И., Богданов Ю.И., Фастовец Д.В., Кузнецов Ю.А. Квантовая томография ионных кудитов // Наноиндустрия. 2020. Т. 13. № S5-3 (102). С. 790–793. <https://doi.org/10.22184/1993-8578.2020.13.5s.790.793>
15. Bantysh B.I., Bogdanov Yu.I. Quantum tomography of noisy ion-based qudits // Laser Phys. Lett. 2021. 18 015203 (Published 18 December 2020).
16. Bogdanov Yu.I. Quantum tomography of arbitrary spin states of particles: root approach // Proceedings of SPIE. 2006. V. 6264. 626403. 10 p.
17. Bogdanov Yu.I., Belinsky L.V. Finite frames constructed by solving Fekete problem and accuracy of quantum tomography protocols based on them // Proceedings of SPIE V.9440, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2014. 94401L
18. Богданов Ю.И., Белинский Л.В. Оптимизация протоколов томографии квантовых состояний на основе решения задачи Томсона // Труды ФТИАН. М. Наука. 2015. Т. 25. С. 90–98.
19. Holevo A.S. [Quantum Systems, Channels, Information], De Gruyter Studies in Mathematical Physics 16 (2012).
20. Bogdanov Y.I. et al. Qutrit State Engineering with Biphotons // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. № 23. P. 230503.
21. Bogdanov Y.I. et al. Statistical reconstruction of qutrits // Phys. Rev. A. 2004. V. 70. № 4. P. 042303.
22. Bogdanov Y.I., Krivitsky L.A., Kulik S.P. Statistical reconstruction of the quantum states of three-level optical systems // JETP Lett. 2003. V. 78. P. 352.

23. Bogdanov Y.I., Bukeyev I.D., Gavrichenko A.K. Studying Adequacy, Completeness, and Accuracy of Quantum Measurement // Opt. Spectroscopy. 2011. V. 111. № 4. P. 647–655.
24. Planat M., Rosu H.C., Perrine S. A Survey of Finite Algebraic Geometrical Structures Underlying Mutually Unbiased Quantum Measurements // Foundations of Physics. 2006. V. 36. P. 1662–1680. eprint: quant-ph/0409081.
25. Wootters W.K., Fields B.D. Optimal state-determination by mutually unbiased measurements // Annals of Physics. 1989. V. 191. № 2. P. 363–381.
26. Bengtsson I. Three Ways to Look at Mutually Unbiased Bases // AIP Conference Proceedings. AIP, 2007. V. 889. P. 40–51.
27. Durt T., Englert B.G., Bengtsson I., and Yczkowski K. On mutually unbiased bases // Int. J. Quantum Inf., V. 8. № 4 PP. 535–640. 2010.
28. Klappenecker A., Rötteler M. Constructions of mutually unbiased bases // International Conference on Finite Fields and Applications. Springer, 2003. P. 137–144.
29. Богданов Ю.И., Лукичев В.Ф., Нуязин С.А., Орликовский А.А., Холево А.С., Чернявский А.Ю. Математическое моделирование влияния квантовых шумов на качество элементной базы квантовых компьютеров // Труды ФТИАН. М. Наука. 2012. Т. 22. С. 39–77.
30. Bogdanov Yu.I., Kalinkin A.A., Kulik S.P., Moreva E.V., Shershulin V.A. Quantum polarization transformations in anisotropic dispersive medium // New Journal of Physics. 2013. V. 15. 035012. 24 p.
31. Chuang I.L., Nielsen M.A. Prescription for experimental determination of the dynamics of a quantum black box // J. Mod. Opt. 44. 2455 (1997); arXiv: quant-ph/9610001.
32. Mohseni M., Reza khani A.T., Lidar D.A. Quantum-process tomography: Resource analysis of different strategies // Phys. Rev. A 77. 032322 (2008).
33. Bogdanov Yu.I., Nuyanzin S.A. Accuracy features for quantum process tomography using superconductor phase qubits // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics, 2012. V. 76. № 2. PP. 139–142; arXiv: quant-ph/1106.2906.
34. Bogdanov Yu.I., Chernyavskiy A.Yu., Holevo A.S., Lukichev V.F., Orlikovsky A.A. Mathematical models of quantum noise // Proc. SPIE 8700, 870019 (2013).
35. Bogdanov Yu.I., Bantysh B.I., Kalinkin A.A., Kulik S.P., Moreva E.V., Shershulin V.A. Optical polarization echo: Manifestation and study by methods of quantum tomography of states and processes // JETP 118. 6. 845–855 (2014).
36. Bogdanov Yu.I., Bantysh B.I., Bogdanova N.A., Kvasnyu A.B., Lukichev V.F. Quantum states tomography with noisy measurement channels // Proceedings of SPIE 10224, International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016, 102242O (December 30, 2016).
37. Бантыш Б.И., Богданов Ю.И., Богданова Н.А., Кузнецов Ю.А. Прецизионная томография квантовых состояний в условиях нечетких квантовых измерений // Труды ФТИАН. М. Наука. 2020. Т. 29. С. 18–42.
38. Życzkowski K., Sommers H.-J. Induced measures in the space of mixed quantum states // J. Phys. A. Math. Gen. 2001. V. 34. № 35. P. 7111–7125.
39. Hayden P., Leung D., Shor P.W., Winter A. Randomizing quantum states: Constructions and applications, Communications in Mathematical Physics, 250(2), 371–391. (2004).